2.7
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 267 – 271

Α΄ Ομάδας

1.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες τοπικό ελάχιστο;

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, όπου και παραγωγίζεται.

Άρα οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα x για τα οποία

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3) = 0$$

$$x-1=0 \quad ή \quad x-2=0 \quad ή \quad x-3=0$$

$$x=1 \quad ή \quad x=2 \quad ή \quad x=3$$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3) > 0$$

$$3(x-1)^2(x-1)(x-2)^2(x-3) > 0$$

$$(x-1)(x-3) > 0$$

$$x<1 \quad ή \quad x>3$$

Το πρόσημο της f′, η μονοτονία της f και τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	–	0	+	
f(x)		↗	τ.μ	↘		↘	τ.ε	↗	

2.i)

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Λύση

α)

$D_f = \mathbb{R}$, όπου και παραγωγίζεται.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Και επειδή η f είναι συνεχής στο 1, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β)

Η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

το σύνολο τιμών της $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Αλλά $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Οπότε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Επειδή, όμως, $0 \in f(\mathbb{R})$ θα υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\rho) = 0$, το οποίο ρ θα είναι μοναδικό, αφού f γνησίως αύξουσα.

2.ii)

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση
$g(x) = x^3 - 3x + 2$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$x^3 - 3x + 2 = 0$

Λύση

α)

$D_g = \mathbb{R}$, όπου και παραγωγίζεται.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία της g και τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	
			τ.μ		τ.ε		

$g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

$g(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

β)

Η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $g(x) = 0$

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1] \Rightarrow$
  $g\big((-\infty, -1]\big) = \big(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\ g(-1)\big] = (-\infty, 4]$

  $*$ Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

  Επειδή $0 \in (-\infty, 4)$, κατά το Θ. Ενδιαμέσων τιμών, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

- g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1] \Rightarrow$
  $g\big([-1, 1]\big) = [g(1), g(-1)] = [0, 4]$

  Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$, την $x = 1$

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty) \Rightarrow$
  $g\big([1, +\infty)\big) = \big([g(1),\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\big) = [0, +\infty)$

  $*$ Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

  Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $[1, +\infty)$ την $x = 1$

Τελικά, εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο άνισες ρίζες.

2.iii)

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση
$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$

Λύση

α)

$D_h = \mathbb{R}$, όπου και παραγωγίζεται: $h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

Το πρόσημο της h', η μονοτονία της h και τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	-1 τ.μ	$\searrow$	-2 τ.ε	$\nearrow$	

$h(0) = 2\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 - 1 = -1$

$h(1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$

β)

Η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $h(x) = 0$

- h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ $\Rightarrow$

  $h\big((-\infty, 0]\big) = \big(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x),\ h(0)\big] = (-\infty, -1]$

  * Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

  Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

- h συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ $\Rightarrow$

  $h\big([0, 1]\big) = [h(1), h(0)] = [-2, -1]$

  Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$

- h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ $\Rightarrow$

  $h\big([1, +\infty)\big) = \big[h(1),\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\big) = [-2, +\infty)$

  * Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

  Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Τελικά, εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα

3.i)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

f συνεχής στο $(-\infty,\ 1)$ σαν πολυωνυμική.

f συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ σαν σύνθεση συνεχών

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{1-x} = e^{1-1} = e^0 = 1$$

Άρα f συνεχής στο 1 και στο $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

Η παράγωγος στο 1 δεν ενδιαφέρει.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	
f(x)		↘	0 τ.ε	↗	1 τ.μ	↘	

3.ii)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

g συνεχής στο $(-\infty, 1)$ σαν πολυωνυμική.

g συνεχής στο $(1, +\infty)$ σαν πολυωνυμική.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2x + 1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 4x + 3) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$g(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

Άρα g συνεχής στο 1 και στο $D_g = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < 1 \\ 2x - 4, & x > 1 \end{cases}$$

Η παράγωγος στο 1 δεν ενδιαφέρει

Το πρόσημο της g', η μονοτονία της g και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		−		−	0	+	
$g(x)$		↘		↘	−1 ολ. ελάχ..	↗	

$g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

4.i)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x$

Λύση

Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1 ολ.ελάχ	↗	

4.ii)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = x^x, \quad x > 0$$

Λύση

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(1 + \ln x)$

$f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$

$f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$

Το πρόσημο της f'', η μονοτονία της f και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\left(e^{-1}\right)^{e^{-1}}$ Ολ . ελάχ	↗	

5.

Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση
$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία
$x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Λύση

Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 3$.

Τοπικό ακρότατο στο $x_1 = -1$, κατά Fermat, $\Rightarrow$ $f'(-1) = 0$

$$3\alpha(-1)^2 + 2\beta(-1) - 3 = 0$$

$$3\alpha - 2\beta - 3 = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Τοπικό ακρότατο στο $x_2 = 1$, κατά Fermat, $\Rightarrow$ $f'(1) = 0$

$$3\alpha 1^2 + 2\beta \cdot 1 - 3 = 0$$

$$3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = x^3 - 3x + 1$ και η παράγωγος $f'(x) = 3x^2 - 3$
Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	3 τ.μ	↘	-1 τ.ε	↗	

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

$f(1) = 1^3 - 3.\ 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

6.
Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν $400 \ m^2$, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.
Λύση
Έστω x, y οι διαστάσεις του τυχαίου ορθογωνίου με εμβαδόν $400 \ m^2$.

$xy = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{400}{x}$

Περίμετρος $= 2x + 2y = 2(x + y) = 2(x + \dfrac{400}{x})$

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $\Pi(x) = 2(x + \dfrac{400}{x}), \quad x > 0$.

$\Pi'(x) = 2(x + \dfrac{400}{x})' = 2(1 - \dfrac{400}{x^2}) = 2\,\dfrac{x^2 - 400}{x^2}$

Το πρόσημο της Π΄, η μονοτονία της Π και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0 20 $+\infty$
$\Pi'(x)$	– 0 +
$\Pi(x)$	↘ 80 ελάχιστο ↗

Η συνάρτηση Π(x) παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 20$, οπότε $y = \dfrac{400}{20} = 20 = x$

Άρα το οικόπεδο με τη μικρότερη περίμετρο είναι το τετράγωνο.

7.
Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
Λύση
Έστω x, y οι διαστάσεις του τυχαίου ορθογωνίου με περίμετρο 80 m.

$2x + 2y = 80 \quad \Rightarrow \quad x + y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = 40 - x$

Εμβαδόν $= xy = x(40 - x) = 40x - x^2$

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $E(x) = -x^2 + 40x, \quad x > 0$

$E'(x) = -2x + 40$

Το πρόσημο της Ε΄, η μονοτονία της Ε και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0 20 $+\infty$
$E'(x)$	+ 0 –
$E(x)$	↗ 400 μέγιστο ↘

Η συνάρτηση Ε(x) παρουσιάζει μέγιστο για $x = 20$, οπότε $y = 20$

8.

Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x να γίνει μέγιστος.

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x είναι

$T'(x) = 2x - \frac{3x^2}{4}$

Πρέπει να βρούμε , για ποια τιμή του x η συνάρτηση $T'(x)$ παρουσιάζει μέγιστο.

$T''(x) = 2 - \frac{6x}{4} = 2 - \frac{3x}{2} = \frac{4-3x}{2}$

Το πρόσημο της T'', η μονοτονία της T' και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

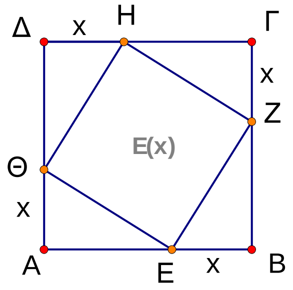
x	0		$\frac{4}{3}$		3
$T''(x)$		+	0	−	
$T'(x)$		↗	$\frac{4}{3}$ μέγιστο	↘	

$$T'\left(\frac{4}{3}\right) = 2\cdot\frac{4}{3} - \frac{3\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = \frac{8}{3} - \frac{3\frac{16}{9}}{4} = \frac{8}{3} - \frac{16}{12} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Η συνάρτηση $T'(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{4}{3}$

9.

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ ,



i) να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x

ii) να βρείτε το x έτσι , ώστε το εμβαδόν Ε(x) του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

Λύση

i)

(ΒΖ) = (ΒΓ) – (ΖΓ) = 2 – x

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΒΕΖ : $(EZ)^2 = x^2 + (2 - x)^2$

$E(x) = x^2 + 4 - 4x + x^2$

$E(x) = 2x^2 - 4x + 4 \qquad , 0 < x < 2$

ii)

$E'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$

Το πρόσημο της Ε΄, η μονοτονία της Ε και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		1		2
Ε΄(x)		–	0	+	
Ε(x)		↘	2 ελάχιστο	↗	

Η συνάρτηση Ε(x) παρουσιάζει ελάχιστο για x = 1.

10.

Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ ευρώ, για $0 \le x \le 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x) = 420x - 2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Λύση

Το κέρδος είναι $P(x) = E(x) - K(x)$

$$P(x) = 420x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 20x^2 - 600x - 1000$$

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000$$

$$P'(x) = -x^2 + 36x - 180$$

Το πρόσημο της P΄, η μονοτονία της P και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		6		30		105
P΄(x)		–	0	+	0	–	
P(x)		↘		↗	τ.μ	↘	

$P(0) = -1000$

$P(30) = -\frac{1}{3}30^3 + 18.30^2 - 180.30 - 1000$

$= -\frac{1}{3}27000 + 18.900 - 5400 - 1000$

$= -9000 + 16200 - 5400 - 1000 = 800 > P(0)$

Άρα το $P(30) = 800$ είναι το μέγιστο του κέρδους, το οποίο συμβαίνει όταν η ημερήσια παραγωγή είναι $x = 30$μονάδες

Β΄ Ομάδας

1.
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx - x + 3$, $x \in [0, \pi]$
i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$

Λύση
i)
$f'(x) = 2συνx - 1$

$f'(x) = 0 \iff 2συνx - 1 = 0 \iff συνx = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$

$f'(x) > 0 \iff 2συνx - 1 > 0 \iff συνx > \frac{1}{2} \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	τ.μ	↘	

$f(0) = 2ημ0 - 0 + 3 = 3$
$f(\frac{\pi}{3}) = 2ημ\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 3 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + 3 > 0$
$f(\pi) = 2ημ\pi - \pi + 3 = 3 - \pi < 0$
Άρα η f έχει μέγιστο $f(\frac{\pi}{3})$ και ελάχιστο $f(\pi)$.

ii)
Η εξίσωση γράφεται $2ημx = x - 3$
$2ημx - x + 3 = 0$
$f(x) = 0$

$f\left([0, \frac{\pi}{3}]\right) = [f(0), f(\frac{\pi}{3})] = \left[3, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + 3\right]$ και επειδή το 0 δεν ανήκει σ'αυτό, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$f\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right) = [f(\pi), f(\frac{\pi}{3})] = \left[3 - \pi, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + 3\right]$ και επειδή το 0 ανήκει σ'αυτό, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, μοναδική αφού f γνησίως φθίνουσα.

2.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Λύση

i)

f συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα, χωρίς ακρότατα.

Προφανής ρίζα είναι η $x = 1$, αφού $f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$.

Είναι και μοναδική λόγω της μονοτονίας.

Για κάθε $x < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$

Για κάθε $x > 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

ii)

φ συνεχής στο $D\varphi = (0, +\infty)$

$\varphi'(x) = 2(\ln x + 1) + 2x - 4 = 2(\ln x + 1 + x - 2) = 2(\ln x + x - 1) = 2f(x)$

Το πρόσημο της φ', η μονοτονία της φ και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x) = 2f(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	0 ελάχιστο	$\nearrow$	

iii)

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g, C_h είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow$

$x\ln x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

$2x\ln x = -x^2 + 4x - 3$

$2x\ln x + x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

Προφανής ρίζα είναι η $x = 1$, αφού $\varphi(1) = 2\cdot 1\ln 1 + 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 0$

και όπως προκύπτει από τον πίνακα του ii), είναι μοναδική.

$g'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1 \Rightarrow g'(1) = \ln 1 + 1 = 1$

$h'(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2})' = -x + 2 \Rightarrow h'(1) = -1 + 2 = 1$

Άρα είναι $g'(1) = h'(1)$ και $g(1) = h(1) = 0$,

επομένως οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $K(1, 0)$

3.i)

Να αποδείξετε ότι , για κάθε $x > 0$ ισχύει **α)** $e^x > 1 + x$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Λύση

α)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $e^x - 1 - x > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x$, $x \geq 0$

$$f'(x) = e^x - 1$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Για κάθε $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - 1 - x > e^0 - 1 - 0$

$$e^x - 1 - x > 0$$

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$, $x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = e^x - 1 - x \overset{\alpha)}{>} 0$ στο $(0, +\infty) \Rightarrow$

g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0)$

$$e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 > e^0 - 1 - 0 - \frac{1}{2}0^2$$

$$e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 > 0$$

3.ii)

Να αποδείξετε ότι , για κάθε $x > 0$ ισχύει **α)** $συνx > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $ημx > x - \frac{1}{6}x^3$

Λύση

α)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2 > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2$, $x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = -ημx + x > 0$ (από την $|ημx| < |x|$)

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0)$

$$συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2 > συν0 - 1 + \frac{1}{2}0^2$$

$$συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2 > 0$$

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ημx - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = ημx - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2 \overset{α)}{>} 0$ στο $(0, +\infty) \Rightarrow$

g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0)$

$$ημx - x + \frac{1}{6}x^3 > ημ0 - 0 + \frac{1}{6}0^3$$

$$ημx - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$$

3.iii)

Να αποδείξετε ότι , για κάθε $x > 0$ ισχύει

α) $(1+x)^{\nu} > 1+\nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$

β) $(1+x)^{\nu} > 1+\nu x+\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$

Λύση

α)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(1+x)^{\nu}-1-\nu x > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = (1+x)^{\nu}-1-\nu x$, $x \geq 0$, .

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1}-\nu$

$$f'(x) = \nu[(1+x)^{\nu-1}-1] > 0 \quad \text{αφού} \quad 1+x > 1$$

άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0)$

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x > (1+0)^{\nu}-1-\nu.0$$

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x > 0$$

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2 > 0$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = (1+x)^{\nu}-1-\nu x-\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$, $x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1}-\nu-\nu(\nu-1)x$

$$g'(x) = \nu[(1+x)^{\nu-1}-1-(\nu-1)x] \overset{\alpha)}{>} 0 \quad \text{στο} \quad (0, +\infty)$$

άρα g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0)$

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2 > (1+0)^{\nu}-1-\nu.0-\frac{\nu(\nu-1)}{2}0^2$$

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2 > 0$$

4.

Να αποδείξετε ότι , αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1$, τότε η f δεν έχει ακρότατα

Λύση

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1 \quad\Rightarrow\quad \left(2f^3(x)+6f(x)\right)'=\left(2x^3+6x+1\right)'$$
$$6f^2(x)\,f'(x)+6\,f'(x)=6x^2+6$$
$$f^2(x)\,f'(x)+f'(x)=x^2+1 \qquad \mathbf{(1)}$$

Έστω ότι η f έχει ακρότατο $f(x_o)$.

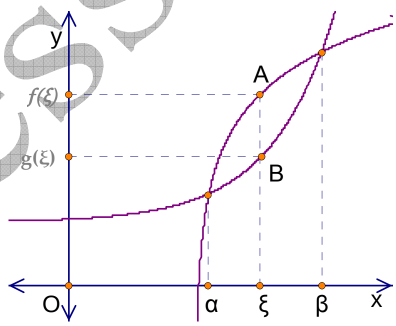
Τότε , από Θ. Fermat , θα ήταν $f'(x_o)=0$ **(2)**

Η (1), για $x=x_o$ $\Rightarrow$ $f^2(x_o)\,f'(x_o)+f'(x_o)=x_o^2+1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$0=x_o^2+1$ που είναι άτοπο

5.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα [α, β]. Το σημείο $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f, C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.



Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi,\ f(\xi))$, $B(\xi,\ g(\xi))$ είναι παράλληλες.

Λύση

Έστω $A(x)=f(x)-g(x)$, $x\in(\alpha,\ \beta)$ η συνάρτηση που εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση απόσταση των C_f, C_g.

Δίνεται ότι η $A(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\xi\in(\alpha,\ \beta)$, οπότε , κατά το Θ. Fermat, θα είναι $A'(\xi)=0$.

Αλλά $A'(x)=f'(x)-g'(x) \quad\Rightarrow\quad A'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)$

$$0=f'(\xi)-g'(\xi)$$
$$f'(\xi)=g'(\xi)$$

Άρα , οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi,\ f(\xi))$, $B(\xi,\ g(\xi))$ είναι παράλληλες.

6.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x) = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2$ με $\alpha < \beta < \gamma$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Λύση

Πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική (αν εκτελεστούν οι πράξεις)

Προφανώς είναι $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$

Με Θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$ **(1)**

Με Θ. Rolle στο διάστημα $[\beta, \gamma]$, υπάρχει $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε $f'(\xi_2) = 0$ **(2)**

Είναι

$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^2 + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)$

$= 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Προφανώς είναι $f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) , η f' έχει πέντε ρίζες α, ξ_1, β, ξ_2, γ και δε μπορεί να έχει και άλλες , διότι η f είναι $6^{ου}$ βαθμού και άρα η f' είναι $5^{ου}$.

Οπότε $f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\xi_1)(x-\beta)(x-\xi_2)(x-\gamma)$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		α		ξ_1		β		ξ_2		γ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
f(x)		↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	

7.

Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

Λύση

i)

Είναι $3x + 4y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4-3x}{4}$

$$E(x) = E_{τρ} + E_{τετρ} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{4-3x}{4}\right)^2$$

$$= \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{16-24x+9x^2}{16}$$

$$= \frac{1}{16}(4\sqrt{3}\,x^2 + 16 - 24x + 9x^2)$$

$$= \frac{1}{16}[(4\sqrt{3}+9)x^2 - 24x + 16) \;, \quad 0 < x < \frac{4}{3}$$

ii)

$$E'(x) = \frac{1}{16}[(4\sqrt{3}+9)2x - 24] = \frac{1}{8}[(4\sqrt{3}+9)x - 12]$$

$$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4\sqrt{3}+9)x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{12}{4\sqrt{3}+9} = ρ$$

Το πρόσημο της Ε΄, η μονοτονία της Ε και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		ρ		$\frac{4}{3}$
E΄(x)		–	0	+	
E(x)		↘	ελάχιστο	↗	

8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM.

Λύση

i)

Πεδίο ορισμού $D_f = [0,\ +\infty)$, ενώ παραγωγίζεται στο $(0,\ +\infty)$

Έστω $\Lambda(x,\ \sqrt{x})$ το τυχαίο σημείο της C_f.

Τότε $(\Lambda A)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2$

$= x^2 - 9x + \frac{81}{4} + x$

$= x^2 - 8x + \frac{81}{4}$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 8x + \frac{81}{4}$, $x \geq 0$, που εκφράζει το $(\Lambda A)^2$

$g'(x) = 2x - 8$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία της g και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$0 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad +\infty$
$g'(x)$	$- \qquad 0 \qquad +$
$g(x)$	$\searrow$ ελάχιστο $\nearrow$

Το ελάχιστο της g, άρα και του $(\Lambda A)^2$, άρα και του (ΛA) συμβαίνει για $x = 4$.
Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M(4,\ \sqrt{4})$, δηλαδή το $M(4,\ 2)$

ii)

Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο M

Τότε $\lambda_\varepsilon = f'(4)$

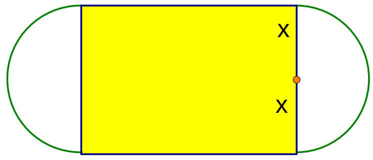
Αλλά $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, οπότε $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{4}$

$\lambda_{AM} = \dfrac{2-0}{4-\frac{9}{2}} = \dfrac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$

Επομένως $\lambda_\varepsilon \lambda_{AM} = \frac{1}{4}(-4) = -1 \Rightarrow \varepsilon \perp AM$

9.

Όπως γνωρίζουμε , ο στίβος του κλασσικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια . Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



Λύση

Έστω $2x$ και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Το μήκος των δύο ημικυκλίων είναι $2\pi x$, άρα $2\pi x + 2y = 400$

$y = 200 - \pi x$

$E(x) = 2x(200 - \pi x)$

$E(x) = -2\pi x^2 + 400x \;\; , \; 0 < x < \dfrac{200}{\pi}$

$E'(x) = -4\pi x + 400$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία της E και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		$\frac{100}{\pi}$		$+\infty$
$E'(x)$		+	0	–	
$E(x)$		$\nearrow$	μέγιστο	$\searrow$	

Το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο , όταν $x = \dfrac{100}{\pi}$,

οπότε $y = 200 - \pi \dfrac{100}{\pi} = 200 - 100 = 100$

10.

Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί τη συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν ακριβώς 100 άτομα , το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 € το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 € . Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

Λύση

Έστω $x \geq 100$ το πλήθος των ατόμων που δηλώνουν συμμετοχή.

Τα επί πλέον των 100 άτομα είναι $x - 100$.

Η έκπτωση ανά άτομο είναι $(x - 100)5$ €

Άρα , κάθε άτομο θα πληρώσει $1000 - (x - 100)5 =$

$$1000 - 5x + 500 = 1500 - 5x \text{ €}.$$

Τα έσοδα θα είναι $E(x) = (1500 - 5x)x = -5x^2 + 1500x$

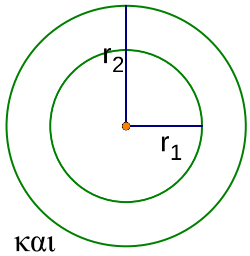
Το πρόσημο της E' και η μονοτονία της E παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	100		150		$+\infty$
$E'(x)$		+	0	–	
$E(x)$		↗	max	↘	

Άρα , θα έχουμε τα περισσότερα έσοδα , όταν δηλώσουν συμμετοχή 150 άτομα.

11.

Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε ότι , τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για $t > 0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/sec , ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/sec. Να βρείτε **:**



i) πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii) πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

Λύση

Έστω $r_1(t)$ και $r_2(t)$ οι συναρτήσεις που εκφράζουν τις ακτίνες και $E(t)$ το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου .

Δίνονται $r_1(0) = 3$, $r_2(0) = 5$

$$r_1'(t) = 0{,}05 , \quad r_2'(t) = 0{,}04$$

$$E(t) = \pi r_2^2(t) - \pi r_1^2(t)$$

i)

$E(t) = 0 \Leftrightarrow \pi r_2^2(t) - \pi r_1^2(t) = 0$

$r_2^2(t) - r_1^2(t) = 0$

$r_2^2(t) = r_1^2(t) \Leftrightarrow r_1(t) = r_2(t)$ **(1)**

$r_1'(t) = 0{,}05 \Leftrightarrow r_1'(t) = (0{,}05t)' \Leftrightarrow r_1(t) = 0{,}05\,t + c_1$

για $t = 0$ είναι $r_1(0) = 0{,}05 \cdot 0 + c_1$, δηλαδή $3 = c_1$

επομένως $r_1(t) = 0{,}05\,t + 3$ **(2)**

Ομοίως $r_2(t) = 0{,}04\,t + 5$ **(3)**

Η (1) $\Leftrightarrow 0{,}05\,t + 3 = 0{,}04\,t + 5$

$0{,}01\,t = 2$

$t = 200$

ii)

$E(t) = \pi r_2^2(t) - \pi r_1^2(t)$

$E'(t) = \pi\, 2 r_2(t)\, r_2'(t) - \pi\, 2 r_1(t)\, r_1'(t)$

$= 2\pi\,(0{,}04\,t + 5)\,0{,}04 - 2\pi\,(0{,}05\,t + 3)\,0{,}05$

$= 2\pi\,[0{,}0016\,t + 0{,}20 - 0{,}0025\,t - 0{,}015]$

$= 2\pi\,[-0{,}0009\,t + 0{,}005]$

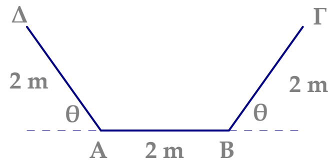
Το πρόσημο της Ε΄ και η μονοτονία της Ε παρουσιάζονται στον πίνακα

t	0	55,6	$+\infty$
Ε΄(t)	+	0	–
Ε (t)	↗	max	↘

Άρα , το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου θα μεγιστοποιηθεί όταν $t \approx 55{,}6$

12.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθε διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



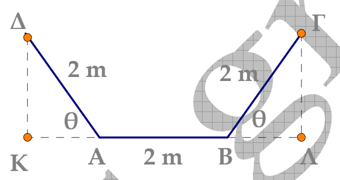
i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με Ε = 4ημθ(1 + συνθ)

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

Λύση

i)

Φέρνουμε τα ύψη ΔΚ, ΓΛ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



ΔΚ = 2ημθ

ΑΚ = ΒΛ = 2συνθ

ΔΓ = ΚΛ = ΚΑ + ΑΒ + ΒΛ = 2συνθ + 2 + 2συνθ = 4συνθ + 2

$$Ε(θ) = \frac{1}{2}(ΑΒ + ΓΔ)\cdot ΔΚ$$
$$= \frac{1}{2}(2 + 4συνθ + 2)\, 2ημθ$$
$$= 4ημθ(1 + συνθ)$$

ii)

$$Ε΄(θ) = 4\,[συνθ\,(1 + συνθ) + ημθ\,(–ημθ)\,]$$
$$= 4\,[συνθ + συν^2θ – ημ^2θ]$$
$$= 4\,[συνθ + συν^2θ – (1 – συν^2θ)\,]$$
$$= 4\,[συνθ + συν^2θ – 1 + συν^2θ\,]$$
$$= 4\,[\,2συν^2θ + συνθ – 1\,]$$

Διακρίνουσα = 1 + 8 = 9

$συνθ = \dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4} = \dfrac{-1\pm 3}{4} = -1$ ή $\dfrac{1}{2}$ και επειδή θ οξεία, θα είναι $συνθ = \dfrac{1}{2}$

άρα $θ = \dfrac{π}{3}$

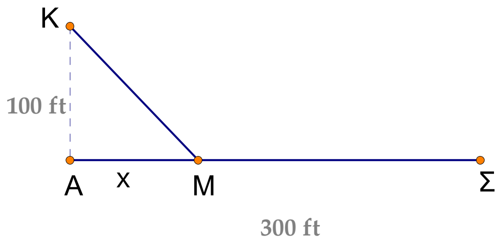
Το πρόσημο της Ε΄ και η μονοτονία της Ε παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

θ	0	π/3	+∞
Ε΄(θ)	+	0	–
Ε (θ)	↗	max	↘

Άρα , το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται όταν $θ = \dfrac{π}{3}$

13.

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής , ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακριά από το σημείο Α.



Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.

i) Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο $T(x) = \dfrac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \dfrac{300 - x}{5}$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Λύση

i)

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΚΜ : $KM = \sqrt{100^2 + x^2}$

$$\text{Χρόνος} \quad T_{KM} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{ταχύτητα}} = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3}$$

$$\text{Χρόνος} \quad T_{M\Sigma} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{ταχύτητα}} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{ταχύτητα}} = \frac{300 - x}{5}$$

Άρα $T(x) = T_{KM} + T_{M\Sigma} = \dfrac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \dfrac{300 - x}{5}$, $0<x<300$

ii)

$$T'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{100^2 + x^2}}\,2x - \frac{1}{5}$$

$$T'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{100^2 + x^2}}\,2x - \frac{1}{5} = 0$$

$$5x - 3\sqrt{100^2 + x^2} = 0$$

$$5x = 3\sqrt{100^2 + x^2}$$

$$25x^2 = 9\,(100^2 + x^2)$$

$$25x^2 = 9\,.100^2 + 9x^2$$

$$16x^2 = 9\,.100^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 3.\,100 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{300}{4} = 75\ ft$$

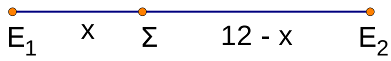
Το πρόσημο της Τ΄ , η μονοτονία της Τ και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		75		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
T (x)		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Άρα , ο ζητούμενος ελάχιστος χρόνος συμβαίνει όταν x = 75 ft.

14.

Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1, E_2, τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km



και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και 8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).

Λύση

Έστω $\rho_1(x)$ η συνάρτηση που εκφράζει την πυκνότητα του καπνού από το E_1 και $\rho_2(x)$ αντίστοιχα από το E_2.

Θα είναι $\rho_1(x) = \dfrac{cP}{x^2}$ και $\rho_2(x) = \dfrac{c8P}{(12-x)^2}$, όπου c σταθερά

Άρα $\rho(x) = \dfrac{cP}{x^2} + \dfrac{c8P}{(12-x)^2} = c\rho\, x^{-2} + c8\rho\,(12-x)^{-2}$, $0 < x < 12$

$$\rho'(x) = c\rho(-2)\, x^{-3} + c8\rho(-2)\,(12-x)^{-3}(-1)$$

$$= -2c\rho\, x^{-3} + 16c\rho\,(12-x)^{-3}$$

$\rho'(x) = 0 \iff -2c\rho\, x^{-3} + 16c\rho\,(12-x)^{-3} = 0$

$$x^{-3} - 8\,(12-x)^{-3} = 0$$

$$x^{-3} = 2^3\,(12-x)^{-3}$$

$$(12-x)^3 = 2^3\, x^3$$

$$(12-x)^3 = (2x)^3$$

$$12 - x = 2x \iff 12 = 3x \iff x = 4$$

Το πρόσημο της ρ', η μονοτονία της ρ και τα ακρότατα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	0		4		12
$\rho'(x)$		–	0	+	
$\rho(x)$		↘	min	↗	

Άρα , ο εργολάβος πρέπει να χτίσει το σπίτι σε απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1.